# תרגיל(דוגמה) 1

מצאו נוסחה רקורסיבית ותנאי התחלה עבור מס' תתי הקבוצות בגודל k של קבוצה בגודל n.

## פתרון

נסמן עבור מס' תתי הקבוצות בגודל k של קבוצה בגודל n. .  
לכן

# תרגיל(דוגמה) 2

נסמן ב את מספר החלוקות של לk חלקים(זרים, לא ריקים). הוכיחו,

## פתרון

מקרי קצה – ברור.  
עבור n ישנן 2 אפשרויות:

1. להופיע כתת קבוצה לבדו(), ואז נותר לחלק את האיברים הנותרים ל חלקים, וזאת ניתן לעשות ב דרכים:
2. n לא מופיע לבדו, ואז נוכל למקם את n בכל אחת מk תתי הקבוצות של n-1 האיברים הנותרים. ישנן חלוקות כאלה ולכן יש אפשרויות.

סה"כ לפי עקרון הסכום

מרחבי הסתברות בדידים

# הגדרה

מרחב הסתברות בדיד(מה"ב) הוא קבוצה סופית , כך שלכל אחד מאבריה מיוחס משקל אי שלילי הנקרא ההסתברות של x וכך שמתקיים

ל נקרא מרחב המדגם. לזוג נקרא מרחב הסתברות בדיד.

## דוגמאות

הטלת קוביה מאוזנת: ,   
הטלת מטבע מאוזן:

# הגדרה

יהי מה"ב(מרחב הסתברות בדיד). תת קבוצה תקרא מאורע. מאורע הכולל בדיוק איבר אחד יקרא מאורע בסיסי. למאורע A נייחס את ההסתברות

# הגדרה

יהי מה"ב. אם לכל מתקיים , נאמר שהמרחב הינו מרחב הסתברות אחידה.

# דוגמאות

1. מטילין 2 מטבעות שונים, אחד זהוב ואחד כסוף. נניח שמדובר במרחב הסתברות אחדיה. מה ההסתברות שלפחות אחד מן המטבעות נפל על עץ?
2. סביבון לא מאוזן: . מה ההסתברות שיצא נ' או ג'?
3. מטילים 2 קוביות שונות כחולה ואודמה. נניח מרחב הסתברות אחידה. מה ההסתברות שיצא "דאבל"?  
   B- סכום התוצאות הוא 7

# הגדרה

יהי מה"ב, מאורעות יקראו זרים אם .

# טענה

מה"ב. אם זרים אזי

## הוכחה

# טענה

יהי מה"ב. יהיו מאורעות זרים **בזוגות** אזי

# טענה

יהי מה"ב. יהיו מאורעות, אזי

# דוגמה

מטילים 2 מטבעות. .  
A – בהטלה הראשונה יצא עץ  
B – בהטלה השניה יצא עץ  
מצאו הסתברות שלפחות באחת ההטלות יצא עץ.

# עקרון ההכלה וההדחה עבור מאורעות

יהי מה"ב, יהיו מאורעות, אזי:

# הגדרה

יהי מה"ב. יהי מאורע. המאורע המשלים של A יסומן הוא .

## הערה

### הוכחה

# דוגמה

מטילין 2 קוביות. מה ההסתברות שסכום התוצאות זוגי?

A – סכום התוצאות זוגי.

דרך א:,

דרך ב: : . F חח"ע ועל => , הסתברות אחידה => , אבל לכן

# הגדרה

יהי מה"ב. נאמר שהמאורעות בלתי תלויים אם

## דוגמה

נטיל 2 קוביות כחולה ואדומה, נגדיר A – "הקוביה הכחולה מראה זוגי", B- "האדומה מראה מס' > 4.

## עוד דוגמה

מטילים 2 קוביות – כחולה ואדומה   
A – תוצאת הכחולה 4. B -

*לכן A וB בלתי תלויים*

### עכשיו...

C – תוצאת הכחולה 6

## מסקנה

B וC לא בלתי תלויים – האינטואיציה לא תמיד עובדת.

# דוגמה

ל60% מהמשפחות בישוב יש דירה. ל70% יש רכב. ל20% אין דירה וגם אין רכב.

1. לכמה אחוזים אין רכב?
2. לכמה אחוזים מבעלי הדירות אין רכב?

## פתרון

נציב את הנתונים בטבלה:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| + | יש דירה | אין דירה |  |
| יש רכב |  |  | 0.7 |
| אין רכב |  | 0.2 | 0.3 |
|  | 0.6 | 0.4 | 1 |

# באופן כללי הטבלה תהיה

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| + | A |  |  |
| B |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  | 1 |

נשלים את הטבלה:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| + | יש דירה | אין דירה |  |
| יש רכב | 0.5 | 0.2 | 0.7 |
| אין רכב | 0.1 | 0.2 | 0.3 |
|  | 0.6 | 0.4 | 1 |

לכן התשובה לא' היא 30% ו

ב' – לפי הטבלה . דרך אחרת: נסמן ד,ר: , נגדיר: A – יש דירה, B – יש רכב

# הגדרה

הסתברות מותנית, , כלומר מה ההסתברות שקרה מאורע B בהינתן שקרה מאורע A

## נחזור לדוגמה

# דוגמה

2 קוביות כחולה ואדומה. Y – סכום הקוביול זוגי, X – תוצאת הכחולה>תוצאת האדומה.  
נניח שנתון שקרה X, מה ההסתברות שקרה Y?

## פתרון

# נוסחת בייס

יהי מה"ב, מאורעות כך ש אזי

# נוסחת ההסתברות השלמה

יהי מה"ב, מאורעות

## הוכחות

נוסחת בייס:

נוסחת ההתסברות השלמה:

# תרגיל

ההתסברות שירד גשם ביום ראשון   
ההסתברות שירד גשם לאחר שביום קודם ירד גשם   
ההסתברות שירד גשם לאחר שביום קודם לא ירד   
מה ההסתברות שירד גשם ביום שני?

## פתרון

A – ביום ראשון ירד גשם.  
B – ביום שני ירד גשם.

אם ירד גשם ביום ראשון . אם לא ירד גשם ביום ראשון . לכן

# משפט

יהי מה"ב, . התנאים הבאים שקולים:

1. x וy בת"ל(בלתי תלויים) ⬄

# דוגמה

לדני 2 ילדים. ידוע שלפחות אחד מהם בן. מה ההסתברות שיש לו 2 בנים?

## פתרון

x – לפחות אחד מהם בן: =>   
y – יש 2 בנים: =>   
 =>

# שאלה יום ההולדת

בחדר n אנשים. מה ההסתברות שאין 2 החוגגים את יום ההולדת באותו תאריך? מהו הn שממנו והלאה הסתברות זו קטנה מ?

## פתרון

A – אין שניים שחוגגים באותו תאריך: . עבור ההסתברות הזו קטנה מ.

## גישה אחרת

לכל 2 אנשים ההסתברות שיום ההולדת שלהם חל באותו יום הוא . כמה זוגות ניתן ליצוק מ23 אנשים?

משחק עם 2 קוביות שונות שחורה ואדומה. תוצאת דאבל מזכה את השחקן ברווח של 21 ש"ח ותוצאה אחרת בהפסד של 3 ש"ח. מה הרווח ההפסד/הצפוי?

## תשובה

הסיכוי להרוויח הוא , הסיכוי להפסיד הוא . לכן השחקן צפוי להרוויח שקל.

# הגדרה

יהי מה"ב. פונ' ממשית נקראת משתנה מקרי ממשי על מרחב ההסתברות.

# הגדרה

יהי מה"ב, משתנה מקרי ממשי. התוחלת של f, תסומן היא הממוצע המשוקלל:

# דוגמה

מטילים 2 מטבעות שונים כסוף וזהוב, כמה פעמים בממוצע יצא פלי?

## פתרון

. נגדיר כך:   
כלומר בממוצע כשמטילים 2 מטבעות מקבלים פלי פעם אחת.

# תרגיל

מהו הערך הממוצע של סכום 2 קוביות שונות?

## פתרון